№ 7. 21 Октября 1886 г. **I Сем.**



ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

Выходитъ 3 раза въ мѣсяцъ, по 12 №№ въ учебный семестръ.

Адр. Ред : Кіевъ, Нижне-Владимірская, д. № 19.

Цѣна: 3 руб. въ учебный семестръ, или 6 руб. въ годъ.

Выводъ формулы,

служащей для разложенія въ рядъ логариѳмовъ.

Г. Флоринскаго.

(Окончаніе).

Докажемъ теперь, что въ ряду

$$\varphi\{(1-x)(1-y)\}=-\mathrm{M}\left[x+y-xy+\frac{(x+y-xy)^2}{2}+\frac{(x+y-xy)^3}{3}+\ldots+\frac{(x+y-xy)^n}{n}+\ldots\right] \quad (4)$$

взаимно сокращаются всѣ члены, въ которые одновременно входятъ множителями x и y [1]). Для этой цѣли отберемъ изъ (4) члены съ произведеніемъ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ степеней $x^r\, y^s$.

---

[1]) Нижеслѣдующее доказательство, предлагаемое авторомъ, быть можетъ могло-бы быть замѣнено другимъ, болѣе легкимъ и краткимъ. Тѣхъ изъ читателей, которымъ удалось-бы таковое найти, просимъ сообщить его и намъ. *Прим. ред.*

http://vofem.ru

Разсмотримъ какой либо n-ый членъ ряда (4):

$$\frac{(x+y-xy)^n}{n}=\frac{[x+y(1-x)]}{n}$$

при чемъ предположимъ, что $n \geqq s$. Разлагая числитель по биному Ньютона, выберемъ изъ разложенія членъ содержащій степень y^s. Этотъ членъ, какъ извѣстно, будетъ

$$\frac{1}{n}C_n^s\, x^{n-s}y^s\,(1-x)^s\,,$$

гдѣ C_n^s есть коэффиціентъ разложенія бинома, выражающій число сочетаній изъ n предметовъ по s. Этому члену дадимъ другой видъ. Такъ какъ изъ теоріи сочетаній извѣстно, что:

$$C_n^s=\frac{n}{s}C_{n-1}^{s-1} \text{ и } C_{n-1}^{s-1}=C_{n-1}^{n-s}\,,$$

то его можно выразить:

$$\frac{1}{s}C_{n-1}^{n-s}\, x^{n-s}y^s\,(1-x)^s\,. \qquad (5)$$

Полагая здѣсь n послѣдовательно равнымъ s, $s+1$, $s+2$, ..., $s+r$ и суммируя полученныя выраженія, мы легко убѣдимся, что полученная сумма

$$\frac{1}{s}(1-x)^s\, y^s\left[1+C_s^1\, x+C_{s+1}^2\, x^2+C_{s+2}^3\, x^3+\ldots+C_{s+r-1}^r\, x^r\right]$$

представляетъ полную и единственную часть ряда (4), въ которую можетъ входить степень x^r, ибо съ одной стороны выраженіе (5) можетъ имѣть мѣсто лишь при $n \geqq s$, а съ другой стороны при $n > r+s$ величина x окажется въ немъ уже въ степени большей, чѣмъ r. Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что коэффиціентъ при произведеніи $x^r\, y^s$ въ ряду (4) равенъ умноженному на $\frac{-M}{s}$ коэффиціенту при x^r въ произведеніи многочленовъ $(1-x)^s$ и

$$1+C_s^1\, x+C_{s+1}^2\, x^2+\ldots+C_{s+r-2}^{r-1}x^{r-1}+C_{s+r-1}^r x^r=\text{A}.$$

Послѣдній многочленъ мы для краткости означили чрезъ А.

http://vofem.ru

Умножая теперь A на $(1-x)$ и располагая произведенiе по степенямъ x, получимъ:

$$A(1-x)=1+\left(C_s^1-1\right)x+\left(C_{s+1}^2-C_s^1\right)x^2+\left(C_{s+2}^3-C_{s+1}^2\right)x^3+\ldots+$$
$$+\left(C_{s+r-1}^r-C_{s+r-2}^{r-1}\right)x^r-C_{s+r-1}^r\,x^{r+1}.$$

Но изъ теорiи сочетанiй извѣстно что:

$$C_m^n=C_{m-1}^n+C_{m-1}^{n-1},$$

откуда

$$C_m^n-C_{m-1}^{n-1}=C_{m-1}^n.$$

На основанiи этихъ формулъ коэффицiенты при степеняхъ x получаютъ болѣе простой видъ и произведенiе можетъ быть написано:

$$A(1-x)=1+C_{s-1}^1x+C_s^2x^2+C_{s+1}^3x^3+\ldots+C_{s+r-2}^rx^r-C_{s+r-1}^rx^{r+1}.$$

Умножая полученное произведенiе вторично на $(1-x)$ и дѣлая въ произведенiи тоже самое упрощенiе коэффицiентовъ, получаемъ:

$$A(1-x)^2=1+C_{s-2}^1x+C_{s-1}^2x^2+C_s^3x^3+\ldots+C_{s+r-3}^rx^r+R,$$

гдѣ подъ R мы для краткости означили совокупность членовъ со степенями x выше x^r. Продолжая послѣдовательно такое умноженiе, мы наконецъ получимъ:

$$A(1-x)^{s-1}=1+C_1^1x+C_2^2x^2+\ldots+C_r^rx^r+R_1,$$

гдѣ подъ R_1 подразумѣваются члены со степенями x выше r. Послѣднее выраженiе есть ничто иное, какъ

$$A(1-x)^{s-1}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^r+R_1.$$

Умножая наконецъ послѣднiй разъ на $(1-x)$, имѣемъ:

$$A(1-x)^s=(1+x+x^2+\ldots+x^r)(1-x)+R_1(1-x),$$

http://vofem.ru

или же:

$$A(1-x)^s = 1-x^{r+1}+R_1(1-x).$$

Такъ какъ полученное выраженіе не содержитъ x^r, то слѣдовательно, коэффиціентъ передъ x^r въ произведеніи $A(1-x)^s$, или коэффиціентъ предъ $x^r\ y^s$ въ ряду (4), равенъ нулю, т. е. въ этомъ ряду взаимно сокращаются всѣ члены, въ которые одновременно входятъ x и y множителями, что и надлежало доказать.

Слѣдоват. рядъ (4) по сокращеніи всѣхъ такихъ членовъ выразится:

$$\varphi\left[(1-x)(1-y)\right] = -M\left[x+y+\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{x^3+y^3}{3}+\ldots+\frac{x^n+y^n}{n}+\ldots\right]$$

Сравнивая послѣднее выраженіе съ (2) и (3)

$$\varphi(1-x) = -M\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^m}{m}+\ldots\right] \qquad (2)$$

$$\varphi(1-y) = -M\left[y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+\ldots+\frac{y^m}{m}+\ldots\right] \qquad (3)$$

получимъ:

$$\varphi\left[(1-x)(1-y)\right] = \varphi(1-x)+\varphi(1-y).$$

Полагая $1-x=z$ и $1-y=v$, гдѣ z и v будутъ положительныя правильныя дроби, получимъ:

$$\varphi(z.v) = \varphi(z)+\varphi(v). \qquad (6)$$

Это и есть основное уравненіе, пользуясь которымъ можно опредѣлить значеніе разсматриваемыхъ рядовъ.

Пусть имѣемъ n положительныхъ правильныхъ дробей $\alpha, \beta, \ldots \nu$. Прилагая послѣдовательно предыдущее равенство, имѣемъ:

$$\varphi(\alpha\beta\ldots\mu\nu) = \varphi(\alpha)+\varphi(\beta\gamma\ldots\mu\nu) = \varphi(\alpha)+\varphi(\beta)+\varphi(\gamma\ldots\mu\nu) = \ldots = \varphi(\alpha)+\varphi(\beta)+$$

$$+\ldots+\varphi(\mu\nu) = \varphi(\alpha)+\varphi(\beta)+\varphi(\gamma)+\ldots+\varphi(\mu)+\varphi(\nu).$$

http://vofem.ru

Полагая въ частномъ случаѣ

$$\alpha = \beta = \ldots = \nu = y,$$

получимъ:

$$\varphi(y^n) = n\varphi(y). \qquad (7)$$

Пусть $y^n = s$, гдѣ s есть также положительная правильная дробь. Отсюда $y = s^{1/n}$; подставляя это въ (7), получимъ:

$$\varphi(s) = n\varphi(s^{1/n}),$$

откуда

$$\varphi(s^{1/n}) = \frac{1}{n}\varphi(s). \qquad (8)$$

Возвышая $s^{1/n}$ въ степень m, получимъ на основаніи (7) и (8)

$$\varphi(s^{m/n}) = m\varphi(s^{1/n}) = \frac{m}{n}\varphi(s).$$

Это равенство показываетъ, что для всякаго положительнаго показателя α

$$\varphi(s^\alpha) = \alpha\varphi(s) \qquad (9)$$

Пусть число $a > 1$ есть основаніе системы логариѳмовъ, и пусть правильная дробь

$$z = a^{-\alpha} = \left(\frac{1}{a}\right)^\alpha.$$

Полагая $s = \frac{1}{a}$, получимъ

$$\varphi(z) = -\log z \,.\, \varphi\left(\frac{1}{a}\right). \qquad (10)$$

Опредѣлимъ наконецъ постоянный коэффиціентъ M такъ, чтобы удовлетворить равенство:

$$\varphi\left(\frac{1}{a}\right) = -M\left[\left(1-\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{a}\right)^3 + \ldots\right] = -1;$$

при такомъ значеніи M, равенство (10) перейдетъ въ

$$\varphi(z) = \log z.$$

http://vofem.ru

Подставляя сюда на мѣсто $\varphi(z)$ ея значеніе по (1), получимъ:

$$\log z = -\mathrm{M}\left[(1-z)+\frac{(1-z)^2}{2}+\frac{(1-z)^3}{3}+\ldots+\frac{(1-z)^m}{m}+\ldots\right].$$

Наконецъ полагая опять $1-z=x$, получимъ:

$$\log(1-x) = -\mathrm{M}\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^m}{m}+\ldots\right] \qquad (11)$$

—равенство, существующее при всякомъ значеніи x равномъ положительной дроби. Абсолютная величина ошибки, которая произойдетъ, если мы ограничимся m первыми членами ряда, по доказанному, не превосходитъ величины

$$\frac{\mathrm{M}x^{m+1}}{m}\cdot\frac{1}{1-x}.$$

Измѣнивъ въ предыдущемъ ряду x на $-x$, получимъ новый рядъ, который означимъ черезъ $\psi(1+x)$.

$$\psi(1+x)=\mathrm{M}\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\pm\frac{x^m}{m}\mp\ldots\right] \qquad (12)$$

Докажемъ сперва, что и этотъ рядъ стремится къ опредѣленному предѣлу при безграничномъ увеличеніи числа его членовъ, если только x есть положительная правильная дробь. Означивъ сумму m первыхъ членовъ ряда (12) чрезъ S_m, а сумму всѣхъ членовъ чрезъ S, можемъ написать этотъ рядъ въ видѣ:

$$\mathrm{S}=\mathrm{S}_m\pm\left[\frac{\mathrm{M}x^{m+1}}{m+1}-\frac{\mathrm{M}x^{m+2}}{m+2}+\frac{\mathrm{M}x^{m+3}}{m+3}-\frac{\mathrm{M}x^{m+4}}{m+4}+\ldots\right],$$

гдѣ долженъ быть избранъ одинъ знакъ $+$ или $-$, смотря потому, есть ли m четное или нечетное. Отсюда легко получить слѣдующія два равенства:

http://vofem.ru

$$\pm\left(S-S_m\right)=Mx^{m+1}\left(\frac{1}{m+1}-\frac{x}{m+2}\right)+Mx^{m+3}\left(\frac{1}{m+3}-\frac{x}{m+4}\right)+\ldots,$$

$$\pm\left(S-S_m\right)=\frac{Mx^{m+1}}{m+1}-Mx^{m+2}\left(\frac{1}{m+2}-\frac{x}{m+3}\right)-Mx^{m+4}\left(\frac{1}{m+4}-\frac{x}{m+5}\right)-\ldots$$

Если x есть положительная правильная дробь, то всѣ разности, заключенныя въ скобки въ правыхъ частяхъ равенствъ, суть величины положительныя. Слѣдовательно изъ предыдущихъ равенствъ имѣемъ:

$$\pm\left(S-S_m\right)>0 \text{ и } \pm\left(S-S_m\right)<\frac{Mx^{m+1}}{m+1} \qquad (13)$$

Полагая въ частномъ случаѣ $m=0$, изъ предыдущихъ равенствъ выводимъ: $S>0$ и $S<Mx$, слѣдовательно нашъ рядъ не можетъ возрастать безпредѣльно. Неравенства же (13) показываютъ, что абсолютная величина ошибки $\pm(S-S_m)$, которая произойдетъ если мы ограничимся m первыми членами ряда будетъ всегда меньше чѣмъ $(m+1)$-ый членъ

$$\frac{Mx^{m+1}}{m+1}.$$

Опредѣлимъ наконецъ значеніе ряда (12). Складывая (11) и (12), получимъ:

$$\log(1-x)+\varphi(1+x)=-M\left[x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\ldots+\frac{x^{2m}}{m}+\ldots\right].$$

Такъ какъ x есть положительная правильная дробь, то правая часть послѣдняго равенства на основаніи (11) есть $\log(1-x^2)$.

Слѣд. $$\log(1-x)+\varphi(1+x)=\log(1-x^2),$$
откуда
$$\varphi(1+x)=\log(1-x^2)-\log(1-x)=\log(1+x).$$

Такимъ образомъ доказана справедливость двухъ равенствъ:

$$\log(1+x)=M\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right]$$

$$\log(1-x)=-M\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots\right]$$

при условіи, что x есть положительная правильная дробь.

http://vofem.ru

Теоремы,

служащія основаніемъ для рѣшенія задачъ планиметріи на maximum и минимумъ [1]).

В. Студенцова

I. Прямая есть кратчайшее разстояніе между двумя точками (теорема геометріи).

Слѣдствія. Наименьшая (предѣльная) величина суммы и наибольшая величина разности двухъ сторонъ треугольника есть третья его сторона.

Наибольшая величина стороны треугольника есть сумма двухъ другихъ его сторонъ, а наименьшая—нуль.

Наибольшая величина катета есть гипотенуза; наибольшая величина хорды—діаметръ [2]).

II. Перпендикуляръ есть кратчайшее разстояніе точки отъ прямой (теорема геометріи).

---

[1]) *Прим. ред.* Къ настоящей статьѣ, присланной намъ любезно инспекторомъ Моршанскаго реальнаго училища, было приложено письмо, изъ котораго для выясненія назначенія статьи мы позволяемъ себѣ привесть слѣдующія слова: „Въ приложеніи къ объясни„тельной запискѣ къ учебному плану рисованія и черченія между прочими геометрическими „задачами на построеніе указаны и *задачи, относящіяся къ нѣкоторымъ случаямъ розыски„ванія наибольшихъ и наименьшихъ величинъ* (см. Учебные планы и примѣрныя программы „предметовъ, преподаваемыхъ въ реальныхъ училищахъ М. Н. Пр., стр. 50). Эти задачи „на maximum и minimum должны быть рѣшаемы и вычерчиваемы, согласно съ программой, „въ пятомъ классѣ. Между тѣмъ *приложенія свойствъ трехчлена 2-й степени къ розыска„нію maximum и minimum* по программѣ (стр. 53) положено проходить только въ дополнительномъ (седьмомъ) классѣ. Сопоставляя эти два требованія программы, необходимо „прійти къ заключенію, что рѣшеніе задачъ на maximum и minimum въ пятомъ классѣ „реальныхъ училищъ должно быть чисто геометрическое". Этимъ соображеніемъ мотивируется составленіе настоящей статьи, которую мы помѣщаемъ съ удовольствіемъ въ интересахъ преподавателей и учениковъ реальныхъ училищъ.

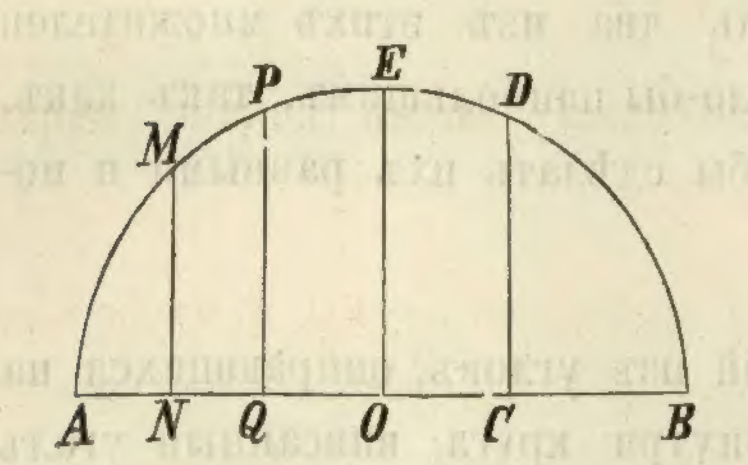
[2]) Здѣсь необходимо различать тѣ случаи, когда наибольшая или наименьшая величины представляютъ собою лишь *предѣльныя* значенія, которыя никогда не могутъ быть

http://vofem.ru

III. Площадь прямоугольника, построеннаго на двухъ отрѣзкахъ [3]), сумма которыхъ постоянна, достигаетъ своей наибольшей величины въ томъ случаѣ, когда эти отрѣзки равны между собою, т. е. когда прямоугольникъ превращается въ квадратъ.

Доказательство. Пусть постоянная сумма отрѣзковъ будетъ прямая AB (фиг. 28). Опишемъ на ней полуокружность. Если возьмемъ два какіе нибудь отрѣзка AC и CB, и возставимъ изъ C перпендикуляръ CD, то, какъ извѣстно,

Фиг. 28.



$$AC.\ CB = CD^2,$$

т. е. площадь прямоугольника, построеннаго на AC и CB, равна площади квадрата, построеннаго на CD. А такъ какъ наибольшая величина перпендикуляра CD (или полухорды) есть радіусъ OE, то очевидно наибольшая величина площади нашего прямоугольника будетъ достигаться въ томъ случаѣ, когда точка C находится въ центрѣ O, т. е. когда оба отрѣзка будутъ равны между собою.

Если-бы два отрѣзка, сумма которыхъ постоянна, не могли стать равными (благодаря какимъ нибудь условіямъ задачи) и, положимъ, одинъ изъ нихъ не могъ бы быть меньше AN, а другой меньше BQ, то, очевидно, самая большая площадь прямоугольника, построеннаго на этихъ отрѣзкахъ равнялась-бы площади квадрата PQ^2, а самая меньшая—площади квадрата MN^2, т. е. наибольшее значеніе площади прямоугольника соотвѣтствовало-бы наименьшему значенію бо́льшаго отрѣзка и наибольшему значенію меньшаго, и наоборотъ. Очевидно также, что maximum этой площади соотвѣтстствуетъ minimum разности между отрѣзками и наоборотъ.

Итакъ, выражая эту теорему иными словами, можемъ еще сказать: изъ всѣхъ прямоугольниковъ одинаковаго периметра наибольшую площадь имѣетъ квадратъ.

достигнуты перемѣнною величиною, отъ тѣхъ, въ которыхъ перемѣнная величина можетъ при своемъ непрерывномъ измѣненіи *пройти* черезъ свое наибольшее, или наименьшее значеніе. Только въ этомъ второмъ случаѣ говорится, что величина имѣетъ maximum или minimum, въ первомъ-же случаѣ этихъ терминовъ лучше не употреблять, во избѣжаніе сбивчивости понятій. Поэтому напр. хорда достигаетъ своего maximum когда она проходитъ черезъ центръ круга, но катетъ не имѣетъ въ сущности maximum, и длина гипотенузы служитъ только предѣльнымъ для него значеніемъ.—(*Прим. ред.*)

[3]) Отрѣзки прямыхъ, какъ здѣсь, такъ и въ послѣдующемъ, принимаются положительными.

http://vofem.ru

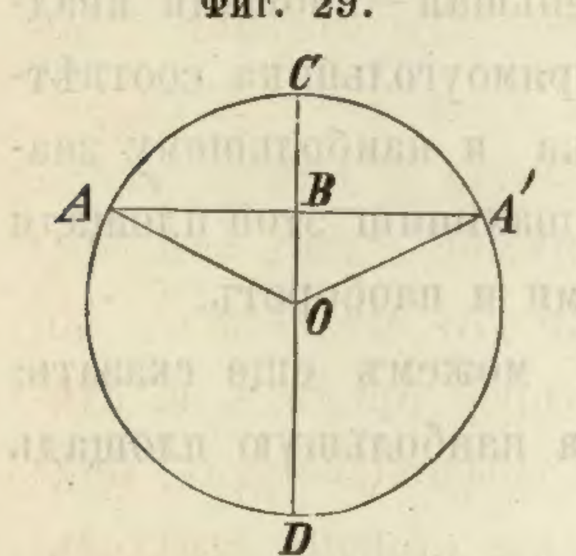
Если длину отрѣзковъ выразимъ числами (въ однѣхъ и тѣхъ-же единицахъ), то на основаніи доказанной теоремы заключаемъ, что вообще произведеніе двухъ чиселъ, сумма которыхъ постоянна, достигаетъ наибольшаго значенія въ томъ случаѣ, когда эти числа равны между собою. Это приводитъ насъ къ болѣе общей теоремѣ, а именно: если имѣемъ нѣсколько чиселъ, сумма которыхъ постоянна, то произведеніе ихъ будетъ наибольшимъ въ томъ случаѣ, когда всѣ эти числа равны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, если-бы хоть какіе нибудь два изъ этихъ множителей мы взяли неравными, то произведеніе не было-бы наибольшимъ, такъ какъ, не измѣняя суммы этихъ чиселъ, мы могли бы сдѣлать ихъ равными и получить бо̀льшее произведеніе.

IV. Вписанный уголъ есть наименьшій изъ угловъ, опирающихся на одну и ту-же дугу и имѣющихъ вершину внутри круга; вписанный уголъ есть также наибольшій изъ угловъ, имѣющихъ вершину внѣ круга и опирающихся на одну и ту-же дугу.

V. Если площадь прямоугольника, построеннаго на двухъ отрѣзкахъ остается постоянною, то сумма отрѣзковъ достигаетъ наименьшей величины въ томъ случаѣ, когда они равны между собою.

Доказательство. Пусть постоянная площадь прямоугольника, построеннаго на двухъ отрѣзкахъ, равна площади квадрата, построеннаго на линіи AB (фиг. 29). Продолжимъ эту линію и отложимъ BA'=BA. Черезъ A и A' проведемъ какую нибудь окружность; ея центръ будетъ находиться на перпендикулярѣ CBD въ точкѣ O. Прямоугольникъ, построенный на отрѣзкахъ CB и BD, будетъ равновеликъ съ квадратомъ, построеннымъ на AB. Сумма этихъ отрѣзковъ равна діаметру CD, т. е. ломанной линіи AOA'. Очевидно, что эта сумма будетъ имѣть наименьшую величину въ томъ случаѣ, когда ломанная линія AOA' превратиться въ прямую AA' т. е. когда окружность проведена такъ, чтобы ея центръ O совпадалъ съ точкою B; слѣдовательно сумма отрѣзковъ CB и BD будетъ minimum, когда CB=BD.

Фиг. 29.



Итакъ, выразивъ ту-же теорему иными словами, будемъ имѣть: изъ всѣхъ прямоугольниковъ одинаковой площади наименьшій периметръ имѣетъ квадратъ.

http://vofem.ru

Если длину отрѣзковъ выразимъ числами, то на основаніи только что доказанной теоремы заключаемъ, что вообще сумма нѣсколькихъ чиселъ, произведеніе которыхъ постоянно, достигаетъ наименьшаго значенія въ томъ случаѣ, когда эти числа равны между собою. Дѣйствительно, сумма такихъ чиселъ не была-бы наименьшею, если бы хоть два какія нибудь изъ нихъ были не равны между собою, потому что, не измѣняя ихъ произведенія и суммы остальныхъ чиселъ, ихъ можно было-бы сдѣлать равными и такимъ образомъ получить меньшую сумму.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Среди журналовъ.

Педагогическій Сборникъ за Сентябрь и Октябрь 1886 года.

I. Въ Сентябрской книжкѣ этого журнала помѣщена статья А. Гольденберга подъ заглавіемъ: *Мелочи изъ области элементарной математики* (стр. 189). Сюда вошли: 1) выводъ формулы для синуса суммы двухъ угловъ (меньше 180°), 2) соотношеніе между сторонами и углами плоскаго треугольника, 3) вычисленіе угловъ треугольника въ зависимости отъ его сторонъ, 4) вычисленіе площади правильныхъ многоугольниковъ и 5) вычисленіе стороны правильнаго многоугольника въ зависимости отъ стороны многоугольника, имѣющаго вдвое меньшее число сторонъ.

Замѣтки эти имѣютъ значеніе при преподаваніи элементарной математики, и потому мы совѣтуемъ Гг. учителямъ обратить на нихъ вниманіе.

1. Въ первой изъ нихъ Г. Гольденбергъ для вывода формулы синуса суммы двухъ угловъ не пользуется Птоломеевой теоремой, какъ это обыкновенно принято (напр. въ учебникѣ тригонометріи А. Малинина), но, основываясь на леммѣ: въ окружности, радіусъ которой принятъ за единицу, длина всякой хорды равна удвоенному синусу вписаннаго угла, опирающагося на эту хорду,—прилагаетъ теорему: каждая сторона треугольника есть сумма проекцій на ея направленіе остальныхъ двухъ сторонъ, и этимъ упрощаетъ выводъ формулы до крайности.

2. Та-же основная теорема проекцій сторонъ треугольника приводитъ автора во 2-й замѣткѣ къ тремъ уравненіямъ

$$\begin{aligned} a &= 0.\ \mathrm{Cos}\alpha + b.\ \mathrm{Cos}\gamma + c.\ \mathrm{Cos}\beta, \\ b &= a.\ \mathrm{Cos}\gamma + 0.\ \mathrm{Cos}\beta + c.\ \mathrm{Cos}\alpha, \qquad (1) \\ c &= a.\ \mathrm{Cos}\beta + b.\ \mathrm{Cos}\alpha + 0.\ \mathrm{Cos}\gamma, \end{aligned}$$

http://vofem.ru

которыя рекомендуются быть принятыми какъ *основныя* уравненія, выражающія связь между *всѣми* (?) элементами треугольника.

Мы не видимъ особенной надобности писать эти уравненія въ вышеприведенной формѣ, съ нулевыми коэффиціентами; было-бы проще писать ихъ прямо въ такомъ видѣ:

$$a=b.\ \mathrm{Cos}\gamma+c.\ \mathrm{Cos}\beta,$$

$$b=c.\ \mathrm{Cos}\alpha+a.\ \mathrm{Cos}\gamma, \qquad (2)$$

$$c=a.\ \mathrm{Cos}\beta+b.\ \mathrm{Cos}\alpha.$$

Притомъ мы не можемъ согласиться съ Г. Гольденбергомъ, будто изъ уравненій (1) или (2) можно вывести чисто аналитическимъ путемъ *всѣ* остальныя зависимости между сторонами и углами треугольника, уже потому, что основной зависимости между тремя углами плоскаго треугольника

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ \qquad (3)$$

изъ этихъ уравненій получить нельзя. Они общнѣе, чѣмъ это нужно для даннаго случая и приводятъ лишь къ условію

$$\alpha\pm\beta\pm\gamma=(2n+1)\pi,$$

слѣдовательно удовлетворяются *не только* тремя сторонами и тремя внутренними углами треугольника. Самъ Г. Гольденбергъ очень хорошо это понимаетъ и потому допускаетъ въ своей статьѣ неточности для того только, чтобы, исходя изъ уравненій (1), прійти къ зависимости (3). Такъ, при извлеченіи квадратнаго корня изъ выраженія

$$\mathrm{Sin}^2\beta\ \ \mathrm{Sin}^2\gamma=(\mathrm{Cos}\alpha+\mathrm{Cos}\beta.\ \mathrm{Cos}\gamma)^2,$$

онъ не ставитъ обоихъ знаковъ и дѣлаетъ оговорку: „такъ какъ синусъ угла треугольника всегда число положительное, то...“; такимъ неявнымъ образомъ къ тремъ *основнымъ* уравненіямъ (1) авторъ какъ-бы прибавляетъ еще въ подмогу три неравенства

$$\alpha<180^\circ, \qquad \beta<180^\circ, \qquad \gamma<180^\circ.$$

Затѣмъ, прійдя при такомъ ограниченіи къ равенству

$$\mathrm{Cos}\alpha=-\mathrm{Cos}(\beta+\gamma), \qquad (4)$$

http://vofem.ru

Г. Гольденбергъ дѣлаетъ отсюда заключеніе, что

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

умалчивая о томъ, что эта послѣдняя зависимость есть лишь одна изъ многихъ, удовлетворяющихъ условію (4).

Итакъ, хотя мы совершенно согласны съ тѣмъ, что было-бы очень полезно обращать вниманіе учащихся на систему уравненій (1) или (2), но лишь при условіи объясненія ихъ общности. Необходимо показать (для лучшей наглядности даже на чертежѣ), что вышеуказанная система трехъ совмѣстныхъ уравненій удовлетворяется не только такими величинами a, b, c, α, β и γ, которыя входятъ въ составъ треугольника и что вслѣдствіе этого она не можетъ быть принята за *основную* тригонометрическую систему уравненій, вполнѣ опредѣленно характеризующихъ свойства плоскаго треугольника. За такую систему, изъ которой строго аналитическимъ путемъ могли-бы быть выведены всевозможныя зависимости между тремя сторонами и тремя углами треугольника, должны быть приняты такія *три* совмѣстныя уравненія, которыя были-бы совершенно достаточны для этой цѣли, т. е. не нуждались-бы въ различныхъ дополнительныхъ условіяхъ (выраженныхъ напр. въ формѣ неравенствъ, какъ у Г. Гольденберга) и представляли-бы въ алгебраической формѣ основныя свойства треугольника. А такъ какъ главное свойство угловъ треугольника выразить тригономитрическимъ равенствомъ нельзя безъ того, чтобы не придать этому равенству болѣе общаго смысла, то *однимъ изъ трехъ основныхъ уравненій* тригонометріи должно быть по необходимости уравненіе

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

За остальныя два можно принять какія угодно два уравненія, дающія зависимость между сторонами и углами; обыкновенно принимаются произвольныя два уравненія изъ системы:

$$\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{Sin}\beta}{b} = \frac{\operatorname{Sin}\gamma}{c}.$$

3. Въ третьей своей замѣткѣ Г. Гольденбергъ совѣтуетъ при вычисленіи величины угловъ треугольника по даннымъ сторонамъ, вычислить предварительно радіусъ круга вписаннаго по формулѣ

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

http://profeg.ru

а потомъ уже вычислять углы по формулѣ

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2}=\frac{r}{p-a}.$$

4. Въ четвертой замѣткѣ обращается вниманіе на возможность быстраго вычисленія въ нѣкоторыхъ случаяхъ площади правильныхъ многоугольниковъ на основаніи слѣдующаго соображенія. Проведемъ къ вершинамъ вписаннаго правильнаго многоугольника радіусы, изъ центра круга описаннаго, тогда получимъ n равныхъ треугольниковъ; площадь каждаго изъ нихъ равна половинѣ произведенія радіуса R описаннаго круга на половину стороны правильнаго многоугольника, имѣющаго $\frac{n}{2}$ сторонъ и вписаннаго въ тотъ-же кругъ. Поэтому, если эта послѣдняя сторона намъ извѣстна, опредѣленіе площади производится очень быстро. Напр. площадь прав. двѣнадцатиугольника =

$$12.\frac{R\frac{R}{2}}{2}=3R^2.$$

Мы не понимаемъ только зачѣмъ по поводу этой замѣтки Г. Гольденбергъ возстаетъ противъ употребленія общепринятаго термина *апоѳема* и рекомендуетъ замѣнить его терминомъ *меньшій радіусъ многоугольника*, оставляя за радіусомъ круга описаннаго названіе *большаго радіуса многоугольника*. „Говорятъ-же напр.—прибавляетъ авторъ въ примѣчаніи—большая ось эллипса, малая ось эллипса“. Да, говорятъ и будутъ всегда говорить, потому что эллипсъ дѣйствительно имѣетъ и *большую* и *малую* ось: многоугольникъ-же самъ по себѣ радіусовъ никакихъ имѣть не можетъ, и поэтому термины *радіусъ круга описаннаго* и *радіусъ круга вписаннаго*, какъ имѣющіе вполнѣ понятный смыслъ, не могутъ быть изгнанными изъ геометріи ради неудачныхъ нововведеній.

5. Въ послѣдней замѣткѣ Г. Гольденбергъ даетъ упрощенный выводъ формулы

$$x^2=R(2R-\sqrt{4R^2-a^2})$$

для вычисленія стороны прав. многоугольника въ зависимости отъ стороны многоугольника, имѣющаго вдвое меньшее число сторонъ, и заканчиваетъ свои „Мелочи“ слѣдующими неумѣстными словами: „Въ преподаваніи геометріи у насъ господствуетъ, между прочимъ, *многописаніе*, отъ котораго, по нашему мнѣнію, было-бы весьма желательно отдѣлаться; *бумажная* ма-

http://vofem.ru

тематика служитъ очень хорошимъ средствомъ, чтобы заслонять отчетливое пониманіе математическихъ истинъ; въ нашихъ школахъ она исполняетъ свое назначеніе не безъ успѣха" (!).

Считаемъ излишнимъ защищать наши уч. зав. отъ подобныхъ упрековъ.

II. Въ Октябрской книжкѣ помѣщена коротенькая замѣтка *И. Д—я* подъ заглавіемъ: *Изслѣдованіе свойствъ биквадратнаго трехчлена* (стр. 252)

Изслѣдованіе это не отличается ни особенной глубиной, ни оригинальностью; притомъ, съ первыхъ-же строкъ читатель недоумѣваетъ почему трехчленъ

$$y = x^2 + px + q$$

названъ биквадратнымъ. Оказывается, что это попросту опечатка. Дальнѣйшее содержаніе статьи заключается въ слѣдующей таблицѣ:

I-й случай:

$$p > 0 \begin{cases} 1)\ q > 0, \text{ всѣ 4 корня мнимые;} \\ 2)\ q < 0, \text{ 2 корня дѣйств. и 2 мнимые.} \end{cases}$$

II-й случай:

$$p < 0 \begin{cases} 1)\ \text{Min.} = q - \frac{p^2}{4} > 0, \text{ всѣ 4 корня мнимые;} \\ 2)\ \text{Min.} = q - \frac{p^2}{4} < 0 \begin{cases} a)\ q > 0, \text{ всѣ 4 корня дѣйств.} \\ b)\ q < 0, \text{ 2 корня дѣйств. и 2 мнимые.} \end{cases} \end{cases}$$

Вопросы и задачи.

№ 46. Въ колодезь бросили камень, и звукъ отъ удара его о воду былъ слышенъ по прошествіи T секундъ отъ начала паденія. Опредѣлить глубину колодца h, полагая, что скорость звука v и ускореніе силы тяжести g извѣстны.

№ 47. Опредѣлить при $x=4$ истинное значеніе дроби

$$\frac{5x^3+10x^2-395x+1100}{x^3-14x^2+61x-84}.$$

http://vofem.ru

№ 48. Опредѣлить значеніе x, при которомъ дробь

$$y = \frac{x}{a+bx^2}$$

достигаетъ наибольшей величины, предполагая a и b положительными.

(Г. Флоринскій).

№ 49. Какъ должны быть соединены N гальваническихъ элементовъ въ батарею для наивыгоднѣйшаго внѣшняго дѣйствія, если внѣшнее сопротивленіе цѣпи есть R, а электровозбудительная сила и внутреннее сопротивленіе каждаго элемента есть e и r?

(Г. Флоринскій).

NB. См. предыдущую задачу.

№ 50. Данъ кругъ и двѣ касательныя къ нему. Провести третью касательную къ кругу такъ, чтобы отрѣзокъ ея, заключенный между данными касательными, имѣлъ данную длину. Указать число возможныхъ рѣшеній.

(Б. Букрѣевъ).

№ 51. Доказать, что сумма

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{18}-\frac{1}{20}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{22}-\frac{1}{24}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{8n-6}-\frac{1}{8n-4}-\frac{1}{8n-2}-\frac{1}{8n}\right)+\ldots$$

съ возрастаніемъ числа членовъ до безконечности стремится къ нулю.

В. П. Ермаковъ.

NB. Изъ элементарной теоріи рядовъ извѣстно, что рядъ

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$$

будетъ сходящійся, но сумма его членовъ зависитъ отъ порядка, въ какомъ складываются члены. Такъ напримѣръ, если мы складываемъ по два положительные и по одному отрицательному члену

$$S'=\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)+\ldots$$

то

$$S' = {}^3/_2 S,$$

что предоставляется доказать самому читателю.

http://vofem.ru

№ 52. Даны n функцій

$$ax+by+\ldots+kt-l,$$

$$a'x+b'y+\ldots+k't-l',$$

$$a''x+b''y+\ldots+k''t-l'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

съ m перемѣнными $x, y, \ldots t$, такъ что $m<n$. Найти величины $x, y, \ldots t$, для которыхъ самая большая изъ абсолютныхъ величинъ этихъ функцій есть minimum.

(Проф. Спб. Ун. А. Н. Коркинъ).

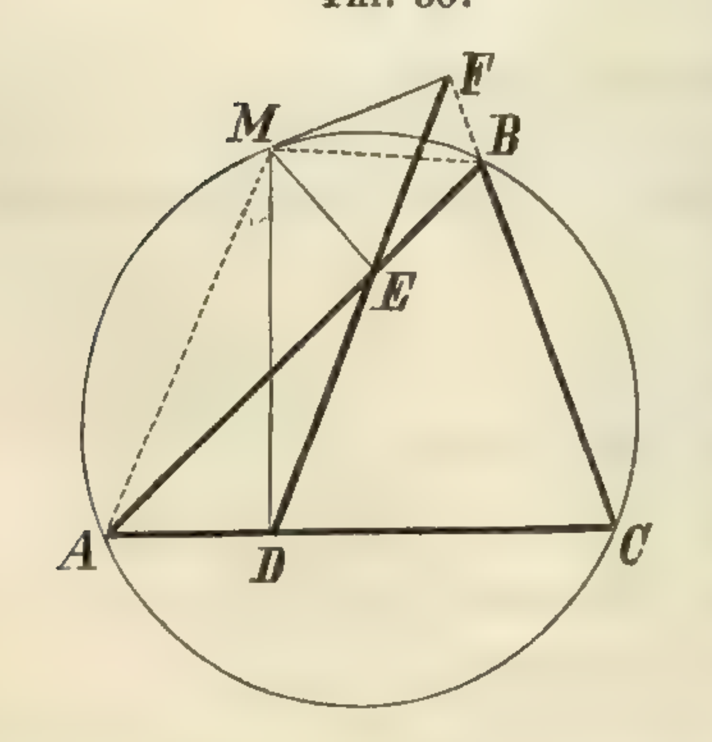
Рѣшенія задачъ.

№ 6. Если изъ какой нибудь точки окружности, описанной около треугольника, проведемъ къ тремъ его сторонамъ перпендикуляры, то ихъ основанія будутъ лежать на одной прямой (Симсона).

Проведемъ изъ произвольной точки M (фиг. 30) описанной окружности перпендикуляры къ сторонамъ треугольника ABC; пусть ихъ основанія находятся въ D, E и F.

Чтобы доказать расположеніе этихъ точекъ на одной прямой, достаточно доказать равенство угловъ AED и BEF; тогда углы эти должны быть вертикальными и, слѣдовательно, линіи DE и EF должны составлять одну прямую. Проведемъ линіи MA и MB. Въ четыреугольникахъ AMBC и DMFC углы при M будутъ равны, какъ дополняющіе уголъ C до 180°; отнимая отъ нихъ общую часть DMB, имѣемъ:

Фиг. 30.



$$\angle AMD=\angle BMF. \qquad (1)$$

Полуокружность построенная на AM должна очевидно пройти черезъ точки D и E, слѣдовательно

$$\angle AMD = \angle AED.$$

На такомъ-же точно основанiи

$$\angle BMF = \angle BEF.$$

Отсюда па основанiи (1) находимъ

$$\angle AED = \angle BEF,$$

что и требовалось доказать.

Теорема эта, какъ было-бы не трудно доказать, имѣетъ и обратное значенiе, а именно: если основанiя перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ нѣкоторой точки на стороны даннаго треугольника, лежатъ на одной прямой, то эта точка принадлежитъ описанной около треугольника окружности.

(В. Долгинцевъ. Учен.: 8 кл. Харьк. I гимн. Н. Ш. и 7 кл. Немир. гимн. I. Г—бъ.)

№ 12. Доказательство теоремы Никомаха.

Въ ряду нечетныхъ чиселъ, раздѣленныхъ по группамъ,

$$1+(3+5)+(7+9+11)+(13+15+17+19)+\ldots$$

n-ая группа имѣетъ передъ собою

$$1+2+3+4+\ldots+(n-1)$$

т. е. $\frac{(n-1)n}{2}$ нечетныхъ чиселъ, слѣдовательно она начинается съ $\left(\frac{(n-1)n}{2}+1\right)$ нечетнаго числа; всякое m-е число въ ряду натуральныхъ нечетныхъ чиселъ есть $(2m-1)$, слѣдовательно 1-е число разсматриваемой нами n-й группы будетъ

$$2\left(\frac{(n-1)n}{2}+1\right)-1=n(n-1)+1.$$

Принявъ это число за 1-й членъ ариѳметической прогрессiи съ разностью равною 2 и числомъ членовъ n, легко найдемъ ея сумму

http://vofem.ru

$$S=n(n-1)+1+n(n-1)+3+\ldots+n(n-1)+2n-1,$$

$$S=\frac{n(n-1)+1+n(n-1)+2n-1}{2}n=n^3.$$

(Учен.: 6 кл. Тульск. гимн. Н. И. и Одесск. р. уч. В. Г., 7 кл.: Нем. г. I. Г—бъ, Кіевск. кад. корп. Е. М—а и А. Ш—въ, 8 кл.: Харьк. I г. Н. Ш., Нем. г. Ш. Г., Кам.-Под. г. С. Рж. и Екатериносл. гимн. В. К.)

№ 13. Изъ красной мѣди, плотность которой=8,788, требуется изготовить пустой шаръ такимъ образомъ, чтобы, плавая въ водѣ, онъ погружался ровно до половины. Каково должно быть отношеніе толщины стѣнокъ къ внѣшнему радіусу?

Называя черезъ R и r внѣшній и внутренній радіусы и черезъ P вѣсъ пустого шара, имѣемъ

$$P=\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)8,788.$$

Съ другой стороны этотъ вѣсъ долженъ равняться вѣсу вытѣсненной воды, объемъ которой по условію есть $\frac{2}{3}\pi R^3$. Отсюда

$$2(R^3-r^3)8,788=R^3, \qquad (1)$$

Обозначимъ черезъ x искомое отношеніе

$$x=\frac{R-r}{R}=1-\frac{r}{R}.$$

Изъ (1), легко находимъ

$$\frac{r}{R}=\sqrt[3]{\frac{2.8,788-1}{2.8,788}}=\frac{25,49}{26}$$

и наконецъ

$$x=\frac{1}{51}\text{ (прибл.)}$$

(Я. Тепляковъ, Учен.: 6 кл. Тульск. г. Н. И., Полт. р. уч. В. З., 7 кл. того-же р. уч. К. К., Кіевск. кад. корп. Е. М—а, 8 кл. Екатерин. г. В. К.)

NB. Въ рѣшеніи ученика В. З. сдѣлана по небрежности ошибка въ вычисленіи у учен. Н. И. вычисленіе не окончено.

№ 19. Найти два цѣлыя числа, которыхъ геометрическое отношеніе равно ариѳметическому.

http://vofem.ru

Обозначая искомыя числа через x и y, имѣемъ

$$\frac{x}{y}=x-y,$$

отсюда

$$x=\frac{y^2}{y-1}.$$

По условію x должно быть числомъ цѣлымъ, слѣдовательно y^2 должно дѣлиться на $y-1$, а это возможно лишь въ томъ единственномъ случаѣ, когда дѣлитель $y-1$ равенъ единицѣ, (потому что вообще число $(n-1)$ съ ближайшимъ слѣдующимъ за нимъ числомъ n не имѣетъ кромѣ единицы общихъ дѣлителей, а стало быть и съ числомъ $n.n=n^2$ тоже должно быть взаимно первымъ). Итакъ:

$$y-1=1, \text{ т. е. } y=2,$$
$$x=4$$

(А. Хуціевъ, Я. Тепляковъ; Учен. 6 кл. Тульск. г. Н. И., 7 кл. Немир. гимн. И. Г—чъ и І. Г—бъ, Кіевск. кад. корп. Е. М—а, 8 кл. Екатер. гимн. В. К. и Кам.—Под. гимн. С. Рж.)

Смѣсь.

Металлическая инркустація посредствомъ гальванопластики мотъ быть легко произведена слѣдующимъ образомъ. Мѣдный предметъ, подлежащій такому украшенію, покрываютъ тонкимъ слоемъ воска, по которому чертятъ требуемый узоръ или буквы. Затѣмъ погружаютъ предметъ въ ванну съ мѣднымъ купоросомъ и соединяютъ его съ анодомъ (углемъ) гальванической батареи; при этомъ въ обнаженныхъ мѣстахъ мѣдь будетъ окисляться и растворяться въ ваннѣ. Когда вымки въ требуемыхъ мѣстахъ достигнутъ достаточной глубины, предметъ вынимается изъ ванны, промывается соляной кислотой и водою, и погружается вторично въ ванну, содержащую соль того металла, которымъ желательно заполнить выимки, (напр. серебра), и на этотъ разъ соединяется уже съ катодомъ (цинкомъ) батареи. Тогда въ тѣхъ-же обнаженныхъ мѣстахъ металлъ будетъ отлагаться вслѣдствіе электролиза соли и по выполненіи выимокъ, остается удалить воскъ съ поверхности предмета и отполировать.

Новый гигрометръ Нодона основанъ на гигроскопическомъ свойствѣ желатина и построенъ на подобіе металлическаго термометра Брегета. Существенную часть прибора составляетъ лента изъ бристольской бумаги, свернутая въ спираль и покрытая съ наружной стороны желатиномъ, а съ внутренней—веществомъ негигроскопичнымъ, какъ напр. такъ называемою жидовскою смолою (bitume de Judée). Къ желатину, чтобы гарантировать его неизмѣняемость, прибавлено незначительное количество салициловой кислоты. Такъ приготовленная спираль будетъ закручиваться при увеличеніи влажности окружающаго воздуха, потому что объемъ желатина увеличивается при поглощеніи водяныхъ паровъ, и—раскручиваться при уменьшеніи влажности. Г. Нодонъ пробовалъ употреблять и различныя другія вещества для приготовленія гигрометра по этому типу; онъ убѣдился, что желатинъ можно замѣнить декстриномъ, гуммиарабикомъ, адрагантовой камедью и пр., а вмѣсто бумаги для ленты можно взять какое нибудь иное органискаго происхожденія вещество; даже спираль изъ эбонита годится. Но послѣ всѣхъ этихъ изысканій онъ окончательно остановился на желатинѣ и бумагѣ. Модель прибора, представленная лѣтомъ текущаго года въ Парижскую Академію наукъ, состояла изъ системы четырехъ спиралей, приготовленныхъ вышеуказаннымъ способомъ и расположенныхъ попарно такъ, что свободные ихъ концы при закручиваніи приводили въ движеніе два маленькіе блока; шелковинка, надѣтая на эти блоки, снабжена указателемъ, или штифтикомъ, чертящимъ на подвижной бумагѣ кривую измѣненія влажности. Болѣе простой гигрометръ Нодона, построенный Г. Дюкрете, состоитъ изъ одной лишь плоской спирали, и по внѣшнему виду похожъ на обыкновенный барометръ анероидъ.

Изъ наблюденій надъ показаніями своего гигрометра Нодонъ пришелъ къ заключенію, что углы закручиванія спирали пропорціональны влажности, что измѣненіе температуры въ предѣлахъ отъ 10° до 35° (С) не оказываетъ вліянія на правильность показаній и что чувствительность прибора прямо зависитъ отъ числа оборотовъ спирали и можетъ быть поэтому сдѣлана какою угодно.

Температура, при которой **вода достигаетъ наибольшей плотности**, находится въ зависимости отъ давленія. По изслѣдованіямъ Кримальди подъ давленіемъ въ 50 атмосферъ вода достигаетъ maximum плотности не при 4° (С), а при 3,5°.

http://vofem.ru

Отвѣты редакціи.

В. В. Лермантову. Отсутствіе въ нашемъ журналѣ экспериментальныхъ задачъ по физикѣ просимъ Васъ считать совершенно случайнымъ и вѣрить, что мы были-бы очень обязаны тѣмъ изъ сотрудиковъ, которые пожелали-бы этотъ пробѣлъ пополнить. Дѣйствительно, до настоящаго времени, всѣдствіе накопленія присланныхъ статей по математикѣ, мы не могли удѣлить соотвѣтственнаго мѣста вопросамъ изъ области опытной физики, но въ крайнемъ случаѣ мы скорѣе согласимся еще увеличить объемъ журнала, нежели отказаться отъ одного изъ самыхъ существенныхъ отдѣловъ нашей програмы. Поэтому мы съ удовольствіемъ готовы помѣщать такія простѣйшія задачи изъ физической техники, о какихъ Вы упоминаете въ своемъ письмѣ, такъ какъ ученики нашихъ среднихъ учебныхъ заведеній и даже студенты университетовъ не имѣютъ почти никакой возможности привыкнуть къ физическимъ манипуляціямъ и, ставъ потомъ сами учителями физики, портятъ зачастую приборы, вслѣдствіе неумѣлаго съ ними обращенія. Въ виду этого просимъ Васъ прислать для помѣщенія въ нашемъ журналѣ хоть нѣсколько темъ по технической физикѣ на собственноручное изготовленіе простѣйшихъ приборовъ. Быть можетъ, найдутся желающіе заняться во время предстоящихъ зимнихъ каникулъ подобнаго рода работами, о которыхъ мы-бы дали въ свое время отчетъ на страницахъ журнала.

Н. Нечаеву. Мы раздѣляемъ Ваше мнѣніе относительно неудовлетворительности изложенія теоріи конденсаторовъ въ обыкновенныхъ нашихъ учебникахъ физики. Въ этомъ отдѣлѣ схоластическое ученіе о связанномъ и свободномъ электричествѣ еще господствуетъ безусловно. Намъ было-бы очень пріятно получить отъ кого нибудь изъ нашихъ сотрудниковъ обстоятельную статью, посвященную этому вопросу, въ возможно элементарной формѣ изложенія. Если-бы Вамъ угодно было заняться составленіемъ такой статьи, мы-бы просили Васъ обратить вниманіе на „Элементы ученія объ электричествѣ" проф. Н. Н. Шиллера' (которые были помѣщены въ Журн. Эл. Матем.), а также на книгу „Электричество въ элементарной обработкѣ" К. Максуэлля (перев. подъ ред. проф. М. П. Авенаріуса).

А. А. Б. (*Егорьевскій золотой промыселъ*). Главное условіе, на которомъ принимаются въ нашъ журналъ статьи и задачи по математикѣ, заключается въ ихъ пригодности. О томъ, какого рода статьи и задачи мы именно считаемъ пригодными, Вы можете заключить изъ вышедшихъ до сихъ поръ семи номеровъ.

А. Б. (*Орелъ*). Въ „Вѣстникѣ Оп. Физ. и Эл. Мат." не было ни одной статьи Г. Грузинцева, и Ваше письмо для насъ совершенно непонятно.

Ученикамъ, рѣшающимъ наши задачи. Предупреждаемъ, что изъ присылаемыхъ въ редакцію рѣшеній не будутъ разсматриваемы и принимаемы во вниманіе всѣ тѣ, которыя написаны небрежно и неразборчивымъ почеркомъ.

Е. О. Д. (*Ст. Золотовская*). Никакого поручительства не надо, такъ какъ, согласно нашему объявленію всѣ учебныя заведенія и служащіе въ таковыхъ при подпискѣ на нашъ журналъ пользуются правомъ кредита въ теченіе всего учебнаго года.

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

http://vofem.ru

ОБЪЯВЛЕНІЯ.

ВЪ КНИЖНЫЕ МАГАЗИНЫ

НИКОЛАЯ ЯКОВЛЕВИЧА ОГЛОБЛИНА,

коммиссіонера ИМПЕРАТОРСКАГО Университета Св. Владиміра

въ Кіевѣ, Крещатикъ, № 33, и въ С.-Петербургѣ, М. Садовая № 4.

Поступили въ продажу новыя книги:

(Окончаніе).

Шапошниковъ Н. Основанія общей ариѳм. и алгебры. М. 1886. ц. 55 к.

Шестаковъ М. О современныхъ задачахъ метеорологіи въ примѣненіи къ сел. хозяйству. Омскъ 1886. ц. 15 к.

Шиллеръ Н. Лекціи по физикѣ (стенограф.) К. 1886. цѣна 3 р. 50 коп.

Шиллеръ Н. Элементы ученія объ электричествѣ. К. 1886. цѣна 1. руб.

Шимковъ А. Курсъ опытной физики. Часть III. О теплотѣ. Съ чертеж. и рис. Изд. 2-е испр. и дополн. Харьковъ 1886. ц. 1 р. 70 к. за 3 ч. 6 р. 20 к.

Шпачинскій Эр. Электрическіе аккумуляторы. К. 1886. ц. 50 коп.

Щавинскій А. Кнопка—Телефонъ. Описаніе ея устройства и примыненій, съ 4-мя чертежами СПБ. 1886. ц. 50 к.

На пересылку слѣдуетъ прилагать 10 коп. на рубль.

ТИПОГРАФІЯ Е. Т. КЕРЕРЪ,

АРЕНДУЕМАЯ

Н. ПИЛЮЩЕНКО и С. БРОДОВСКИМЪ.

Кіевъ, Б. Владимірская, возлѣ Золотыхъ воротъ, д. Сѣтовой.

Принимаются заказы на всевозможныя типографскія и ксилографскія работы.

Требованія Гг. иногороднихъ выполняются немедленно и высылаются по назначенію съ первой почтой.

ЦѢНЫ НА ВСѢ ЗАКАЗЫ САМЫЯ УМѢРЕННЫЯ.

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
— И —
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый въ г. Кіевѣ съ начала 188⁶/₇ учебнаго года при участіи иногородныхъ и мѣстныхъ сотрудниковъ подъ редакціею кандидата физико-математическихъ наукъ Э. К. Шпачинскаго, выходитъ брошюрами отъ 1-го до 1½ печ. листа **три раза въ мѣсяцъ по 12 №№ въ каждый уч. семестръ.**

ЦѢНА СЪ ДОСТАВКОЙ И ПЕРЕСЫЛКОЙ

Три рубля за каждый семестръ (полугодіе).

Подписка принимается въ Редакціи (Кіевъ, Нижне-Владимірская № 19) и въ книжныхъ магазинахъ, которые удерживаютъ 5% подписной суммы.

Подписка не принимается менѣе чѣмъ на одинъ сем. и болѣе чѣмъ на два семестра.

Отдѣльными номерами Вѣстникъ Опытн. Физики и Эл. Мат. не продается.

Лица, подписавшіяся въ теченіе семестра получаютъ всѣ номера, вышедшіе съ начала семестра.

Учебныя заведенія и служащіе въ таковыхъ при своевременномъ заявленіи о высылкѣ журнала въ кредитъ могутъ вносить деньги когда угодно въ продолженіе всего учебнаго года.

Лица, желающія получать изъ редакціи счета и квитанціи на 5 руб. и болѣе, благоволятъ прилагать 5 коп. марку.

За помѣщеніе на послѣднихъ страницахъ частныхъ объявленій о журналахъ, книгахъ, физическихъ приборахъ, учебныхъ пособіяхъ и проч. редакція взымаетъ 1-й разъ: за цѣлую страницу—3 руб., за ½ стр.—1 р. 60 к., за ¼ стр.—1 руб,; при повтореніи взымается всякій разъ половинная плата.

Редакція принимаетъ на себя по соглашенію изданіе на русскомъ языкѣ сочиненій, учебниковъ и брошюръ по физикѣ и математикѣ, а также посредничество въ пріобрѣтеніи какъ русскихъ, такъ и иностранныхъ спеціальныхъ физико-математическихъ книгъ и журналовъ.

ВЪ СКЛАДѢ РЕДАКЦІИ

имѣются для продажи слѣдующія книги:

1. Томъ I-й „Журнала Элемент. Матем." за 188⁴/₅ учеб. годъ, 18 №№ цѣна 4 руб.
2. Томъ II-й „ „ „ „ 188⁵/₆ „ „ „ „ „ 4 „
3. Рѣчь Споттусвуда „О связи матем. съ другими науками" переводъ Н. А. Конопацкаго 1885. Изд. Кам.-Под. Гимн. цѣна 35 коп.
4. „Электрическіе Аккумуляторы. Сост. Эр. Шпачинскій 1886. Изданіе Журнала Элементарной Математики, цѣна 50 коп.
5. „Основы Ариѳметики Е. Коссака", Пер. И. Н. Красовскаго 1885. Изданіе Журнала Элементарной Математики, цѣна 50 коп.
6. Рѣчь Клаузіуса: „Связь между великими дѣятелями природы". Пер. И. Н. Красовскаго 1885. Изданіе Журнала Элементарной Математики, цѣна 20 коп.
7. „Вопросы о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ", рѣшаемые посредствомъ уравненій 2-й ст. Бріо. Пер. И. Н. Красовскаго 1886. Изд. Журн. Эл. Матем. цѣна 40 коп.

За пересылку прилагается 10% означен. цѣны. При покупкѣ 10 экз. и болѣе дѣлается 20% уступки.

Дозволено цензурою. Кіевъ, 28 Октября 1886 года.

Тип. Е. Т. Керерь, арендуемая Н. Пилющенко и С. Бродовскимъ.